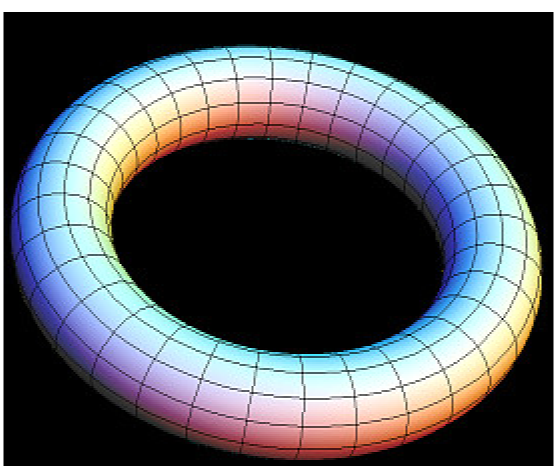
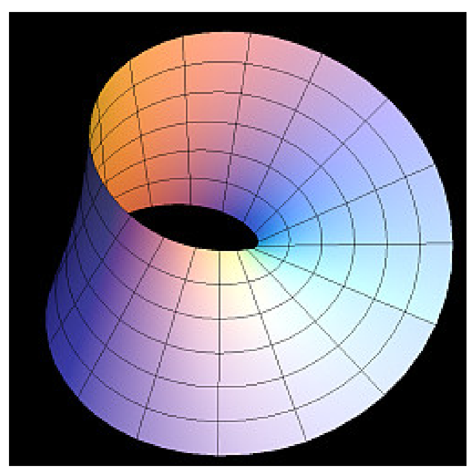
# Aula 6

## Fluxo através de uma superfície (orientável)

Definição: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície, isto é, uma variedade de dimensão 2. Diz-se que $S$ **é uma superfície orientável** se existir um campo vetorial contínuo $\nu : S \to \mathbb{R}^3$ tal que em cada ponto $p \in S$ o vetor $\nu(x)$ é unitário e normal a $S$.
Quando tal é verificado, existem duas alternativas para esse campo, $\pm\nu$, e cada uma delas diz-se que define **uma orientação de** $S$ (das duas possíveis).
Esta definição é generalizável a qualquer variedade $M \subset \mathbb{R}^n$, de dimensão $n-1$ (designa-se por **hipersuperfície**).

Orientável vs Não-orientável

Definição: Seja $S \subset \mathbb{R}^n$, uma hipersuperfíce (variedade de dimensão $n-1$) orientável. Seja $\nu : S \to \mathbb{R}^n$ a escolha de uma das duas possíveis orientações de $S$ e seja $\mathbf{F} : S \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial contínuo definido em $S$. Designa-se por **fluxo de $\mathbf{F}$ através de $S$ na orientação dada por $\nu$** o integral

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \nu \, dS.$$

Se $S$ for parametrizada por $g : \Omega \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ este integral é dado pela fórmula

$$\int_\Omega \mathbf{F}(g(u)) \cdot \nu(g(u))(\det Dg(u)^T Dg(u))^{1/2} du.$$

Proposição: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície, ou seja, uma variedade de dimensão 2, orientável, parametrizada (globalmente) por $g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, e seja $\mathbf{F} : S \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial contínuo sobre a superfície. Então, o fluxo de $\mathbf{F}$ através de $S$ é dado por

$$\pm \int_\Omega \mathbf{F}(g(u,v)) \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right) du \, dv,$$

com a escolha do sinal $\pm$ de acordo com a orientação escolhida para a superfície.

# Divergência

Definição: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $\mathbf{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$, um campo vetorial de classe pelo menos $C^1(\Omega)$. Designa-se por **divergência de** $\mathbf{F}$, e representa-se por $\operatorname{div}\mathbf{F}$ ou $\nabla \cdot \mathbf{F}$, o operador diferencial que transforma o campo vetorial $\mathbf{F}$ num campo escalar, dado por

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

Diz-se que um campo vetorial $\mathbf{F}$ é **solenoidal ou incompressível** se tem divergência nula,

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = 0.$$

Propriedades: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto,
$\mathbf{F}, \mathbf{G} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ campos vetoriais de classe $C^1(\Omega)$,
$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um campo escalar de classe $C^2(\Omega)$ e
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias.
Então tem-se:

i) $\operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{tr} D\mathbf{F}$ (traço da matriz jacobiana de $\mathbf{F}$).

ii) $\operatorname{div} \mathbf{x} = \operatorname{div}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = n$.

iii) $\operatorname{div}(\alpha \mathbf{F} + \beta \mathbf{G}) = \alpha \operatorname{div} \mathbf{F} + \beta \operatorname{div} \mathbf{G}$ (linearidade).

iv) $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{div} \mathbf{F} + \nabla f \cdot \mathbf{F}$.

v) $\operatorname{div} \nabla f = \Delta f$,

em que $\Delta f$ é o chamado **laplaciano** de $f$ dado por

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

# Rotacional (em $\mathbb{R}^3$)

Definição: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e $\mathbf{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, um campo vetorial de classe pelo menos $C^1(\Omega)$. Designa-se por **rotacional de $\mathbf{F}$**, e representa-se por $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ ou $\nabla \times \mathbf{F}$, o operador diferencial que transforma o campo vetorial $\mathbf{F}$ num campo vetorial, dado por

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Diz-se que um campo vetorial $\mathbf{F}$ é **irrotacional** se tem rotacional nulo,

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Propriedades: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto, $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campos vetoriais de classe $C^2(\Omega)$, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um campo escalar de classe $C^2(\Omega)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias.
Então tem-se:

i) $\mathrm{rot}\,(\alpha \mathbf{F} + \beta \mathbf{G}) = \alpha\,\mathrm{rot}\,\mathbf{F} + \beta\,\mathrm{rot}\,\mathbf{G}$ (linearidade).

ii) $\mathrm{rot}\,(f\mathbf{F}) = f\,\mathrm{rot}\,\mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F}$.

iii) $\mathrm{rot}(\nabla f) = 0$.

iv) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\mathbf{F}) = 0$.

# Teorema da Divergência

## (ou de Gauss-Ostrogradsky)

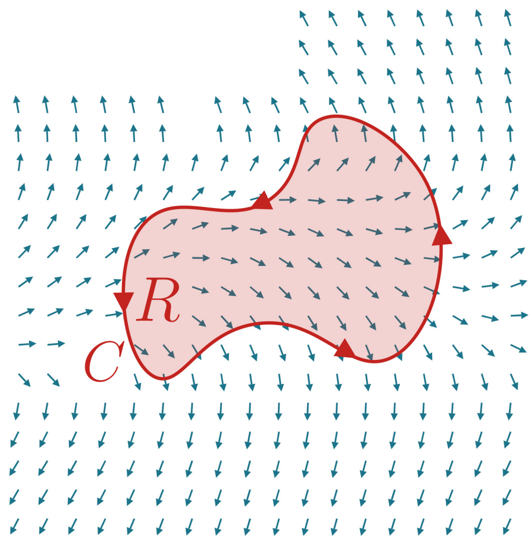
Teorema: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado, com uma fronteira $\partial\Omega$ seccionalmente constituída por uma variedade diferenciável de dimensão $n-1$ (variedade com cantos).
Seja $\mathbf{F} : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$, um campo vetorial de classe pelo menos $C^1$. Então, tem-se

$$\int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{F} dV_n = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \nu \, dV_{n-1},$$

em que $\nu$ é a normal unitária exterior à fronteira de $\Omega$.

# Teorema de Green e Teorema da Divergência em $\mathbb{R}^2$

$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \oint_C (P,Q)\cdot d\alpha$$




$$\Updownarrow$$

$$\iint_R \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\, dx\, dy = \oint_C (P,Q)\cdot \nu\, ds$$